ISSN 1814-6422

Потенциал

Журнал для старшеклассников и учителей

Ноябрь 2007 №11

Sapere Aude – Дерзай знать!

Задачи внутришкольной олимпиады «Фантастика и реальность»

В данной статье представлены материалы олимпиады по физике и астрономии, проведённой 28-29 апреля 2007 года в лицее №2 г. Тулы.

9 класс

Задача 1. «Туманность Андромеды» И. Ефремова: внутренняя планета «железной звезды». В системе «железной звезды» спектрального класса Т обнаружены две планеты. Данные о внутренней планете следующие. Ускорение свободного падения на поверхности $g = 3g_0$. Масса планеты $M = 43M_0$. Давление атмосферы $P = 1{,}4P_0$. Толщина атмосферы $H = 1700$ км. Индекс «0» относится к Земле:

$$M_0 = 6{,}0 \cdot 10^{24} \text{ кг}; \ g_0 = 9{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$P_0 = 10^5 \text{ Па}.$$

1. Вычислить радиус планеты.
2. Оценить плотность атмосферного газа планеты.

Решение. 1) Так как $g = \dfrac{GM}{R^2}$, то

$$R = \sqrt{\frac{GM}{g}} = \sqrt{\frac{43GM_0}{3g_0}} = 2{,}4 \cdot 10^7 \text{ м} = 3{,}8R_0.$$

2) Так как давление равноплотной атмосферы $P = \rho g H$, то

$$\rho = \frac{P}{gH} = \frac{1{,}4P_0}{3g_0H} =$$

$$= 2{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3 = 2{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ г/см}^3.$$

Задача 2. «Космическая струна». Диаметр космической струны значительно меньше радиуса Солнца, её массовая плотность на единицу длины $\mu = 10^{22}$ г/см. Сворачиваем струну в кольцо массой M равной солнечной $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г.

Вычислить радиус R кольца в единицах солнечного радиуса

$$R_\odot = 7 \cdot 10^{10} \text{ см}.$$

Решение. Пусть M – масса кольца, его длина $L = 2\pi R$, тогда

$\mu = \dfrac{M}{L} = \dfrac{M_\odot}{2\pi R}$, откуда

$$R = \frac{M_\odot}{2\pi\mu} = 3{,}2 \cdot 10^{10} \text{ см} = 0{,}45R_\odot.$$

Задача 3. «Чёрные звёзды Лапласа-Митчелла». В середине XVIII века была выдвинута гипотеза о возможности существования невидимых («чёрных») звёзд. Поле тяготения чёрной звезды настолько сильно, что даже свет, испущенный с её поверхности, не может уйти на бесконечность.

1) Выясните (вслед за Митчеллом и Лапласом), какой радиус должна иметь чёрная звезда, чтобы она была принципиально ненаблюдаемой (невидимой)?

2) Какую плотность должна иметь такая звезда?

Численные оценки получите для звезды солнечной массы.

Решение. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = Const$$

следует, что звезда является чёрной (ненаблюдаемой в принципе), если её радиус $R < R_g = \frac{2GM}{c^2}$. Из уравнения движения для круговых орбит следует, что радиус круговой орбиты световой корпускулы $r_{кр} = \frac{GM}{c^2} = 0{,}5R_g$ (при орбитальной скорости $v = c$). Таким образом, для радиуса чёрной звезды получаем: $0 < R \le r_{кр} = 0{,}5R_g$. При $R \approx r_{кр} = \frac{GM}{c^2}$ и $M = M_\Theta = 2\cdot 10^{30}$ кг получаем:

$$R \approx \frac{GM_\Theta}{c^2} = 1{,}5 \text{ км и}$$

$$\rho = \frac{3M_\Theta}{4\pi R^3} = 1{,}4\cdot 10^{20} \text{ кг/м}^3 =$$

$$= 1{,}4\cdot 10^{17} \text{ г/см}^3.$$

Задача 4. «Звезда 47 Большой Медведицы». У звезды 47 Большой Медведицы обнаружена планета. Период обращения планеты вокруг звезды $T = 3$ года. Масса звезды $M = 1{,}1M_\Theta$. На каком расстоянии a находится планета от звезды (в а.е.)?

1 год $= 3{,}2\cdot 10^7$ с ; 1 а.е.$= 1{,}5\cdot 10^{11}$ м ;

$M_\Theta = 2{,}0\cdot 10^{30}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ $\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$.

Решение. Из уравнения движения для круговых орбит

$m\omega^2 a = GMm/a^2$, где $\omega = 2\pi/T$,

получаем:

$$a = \left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 GM\right]^{1/3} = 3{,}2\cdot 10^{11} \text{ м} = 2{,}1 \text{ а.е.}$$

Задача 5. «Гипотеза Тульских астрофизиков». В системе звезды $\tau\ Traktor$, как предполагают юные тульские астрофизики, находится необычайно плотная планета *X*. Причиной такой гипотезы послужило обнаружение у планеты *X* спутника с периодом обращения $T = 100$ с. Какие выводы можно сделать о величине плотности ρ этой планеты?

Гравитационная постоянная

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}(\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2).$$

Решение. Из уравнения движения для круговых орбит

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2} \quad (\omega = 2\pi/T)$$

следует, что минимальный период обращения спутника достигается при $r \approx R$, где R – радиус планеты. Учитывая, что масса планеты $M = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$, получим

$$T^2_{min} = \frac{3\pi}{G\rho}.$$

Из условия $T \ge T_{min}$ получаем

$$\rho \ge \frac{3\pi}{GT^2} = 1{,}4\cdot 10^7 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 6. «Геостационарные спутники и горизонты». Геостационарный спутник, запущенный в плоскости экватора, всё время висит над одной и той же точкой земной поверхности.

1) На какой высоте h находится геостационарный спутник? Какова его орбитальная скорость (в км/с)?

2) На каких широтах геостационарные спутники видны с уровня моря? Возможно ли поддерживать связь между научными станциями на

Северном и Южном полюсах с помощью геостационарных спутников?

3) Какой высоты H телеантенну нужно установить на полюсе, чтобы принимать телесигнал с геостационарного спутника?

Масса Земли $M = 6\cdot 10^{24}$ кг, радиус $R = 6400$ км, период вращения $T = 24$ ч.

Гравитационная постоянная

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Решение. 1) Из уравнения движения $m\omega^2 r = \dfrac{GMm}{r^2}$ для круговых орбит спутников получаем:

$$r = \left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 GM\right]^{\frac{1}{3}}$$

(учли, что $\omega = 2\pi/T$). Для геостационарных спутников T=24 ч. Следовательно, радиус орбиты спутника $r = 4{,}2\cdot 10^7$ м = 6,6R. Т. к. $r = R+h$, то $h = r - R = 5{,}6R = 36000$ км.

Орбитальная скорость аппарата

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 3{,}1\ \text{км/с}.$$

2) Как видно из рис. 1, спутник виден из точки B, находящейся на широте $\alpha = 90^\circ - \gamma$. Т.к. $\sin\gamma = \dfrac{R}{r}$, то $\alpha = 90^\circ - \arcsin\left(\dfrac{R}{r}\right) = 81^\circ$, $r = R+h$. На более высоких широтах и, следовательно, на полюсах Земли геостационарные спутники не видны с уровня моря. Очевидно, что связь на полюсах с помощью геостационарных спутников невозможна.

3) Как видно из рис. 1,

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{R+H}{r} = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}.$$

Следовательно,

$$H = R\left(\frac{1}{\sqrt{1-(R/r)^2}} - 1\right) = 75\ \text{км}.$$

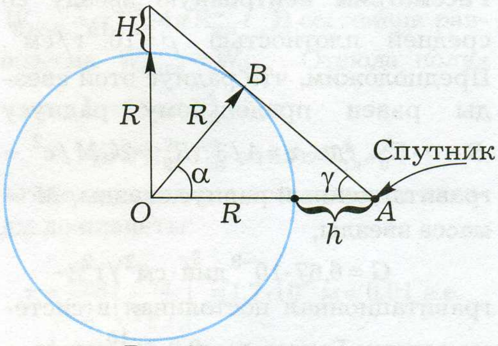

Рис. 1

Если учесть, что высота ледяного купола Антарктиды на Южном полюсе около 3 км, антенну пришлось бы поднять над его поверхностью на 72 км.

10-11 классы

Задача 1. Шаровая молния. Шаровая молния диаметром 30 см расщепила торчащую из воды деревянную сваю диаметром $2r = 30$ см вдоль волокон на длинные щепки. Длина сваи $l = 20$ см. Оцените энергию, запасённую в шаровой молнии. Предел прочности дерева на разрыв вдоль волокон $\sigma_m = 3$ Мпа. Начальная температура воды $t_0 = 20^\circ C$. Удельная теплоёмкость воды C=4200 Дж/(кгК), удельная теплота парообразования воды L = 2,26 кДж/г. Коэффициент пористости дерева $\alpha = 0{,}1$. Под коэффициентом пористости понимают долю объёма древесины, приходящегося на поры.

Решение. Энергия шаровой молнии: $Q \approx m(c\Delta T + L)$, где $\Delta T = 80$ K, m – масса воды, превратившейся в пар. Эту массу найдём из условия разрыва $P \ge \sigma_m$, или $\dfrac{mRT}{\mu V} \ge \sigma_m \to$

$$\to m_{\min} = \frac{\mu\sigma_m V}{RT} = \frac{\mu\sigma_m \cdot \alpha\pi r^2 l}{RT} = 25 \text{ г}.$$

Следовательно, $Q \approx 65$ кДж.

Задача 2. Нейтронная звезда. Рассмотрим нейтронную звезду со средней плотностью $\rho = 10^{15}$ г/см^3. Предположим, что радиус этой звезды равен предельному радиусу $R = \alpha \cdot R_g$, где $\alpha = 4/3$, $R_g = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус звезды, M – масса звезды,

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ дин $\cdot$ см^2/г^2 – гравитационная постоянная в системе единиц Гаусса, $c = 3{,}0 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света в вакууме. Вычислить массу этой звезды (в единицах солнечной массы $M_\odot = 2{,}0 \cdot 10^{33}$ г) и её радиус (в км).

Решение. Так как $R = \alpha \cdot \dfrac{2GM}{c^2}$ и

$$M = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3}, \text{ то}$$

$$R = c \cdot \sqrt{\frac{3}{8\pi\alpha G\rho}} = 11 \text{ км и}$$

$$M = \frac{4\pi\rho R^3}{3} = 5{,}6 \cdot 10^{33} \text{ г} = 2{,}8 M_\odot.$$

Задача 3. «Космическая струна».

1. Сотворим кольцо – ловушку для звездолёта. Диаметр космической струны значительно меньше радиуса Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ см, её массовая плотность на единицу длины $\mu = 10^{22}$ г/см. Сворачиваем струну в кольцо радиусом $R = R_\odot$. Какой будет масса M такого кольца (в единицах массы Солнца)?

2. Захват звездолёта. Звездолёт, находясь на очень большом расстоянии от кольца-ловушки, начинает падать на центр кольца вдоль его оси симметрии Ox (рис. 2). Какую скорость будет иметь звездолёт в центре кольца? Каким будет дальнейшее движение звездолёта в гравитационном поле кольца?

Решение. 1) Так как

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{M}{2\pi R_\odot},$$

то $M = 2\pi\mu R_\odot = 4{,}4 \cdot 10^{33}$ г $= 2{,}2 M_\odot$.

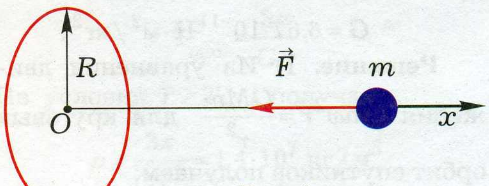

Рис. 2

2) Скорость звездолёта найдём из закона сохранения энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} + m\varphi = Const, \qquad (1)$$

где φ – гравитационный потенциал кольца. Так как потенциал элемента массы кольца $\Delta\varphi = -\dfrac{G\Delta M}{r}$, где $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ – расстояние от ΔM до произвольной точки x, лежащей на оси кольца, то в силу принципа суперпозиции полей имеем:

$$\varphi(x) = \sum_i \Delta\varphi_i = -\sum_i \frac{G\Delta M_i}{r(x)} = = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Т.к. $v_0 = 0$ и $\varphi = 0$ при $x = \infty$ (начальные условия), а в центре кольца $\varphi = -\dfrac{GM}{R}$ (при $x = 0$), то из уравнения (1):

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 920 \text{ км/с}.$$

Задача 4. Планетная система «Железной звезды» Ивана Ефремова. Вокруг «железной звезды» вращаются две планеты. «Железная звезда» – это «невидимая звезда спектрального класса Т, погасшая, но ещё не остывшая окончательно или не разогревшаяся снова. Она светит длинноволновыми колебаниями тепловой части спектра – чёрным, для нас инфракрасным светом... «Тантра» неуклонно приближалась к звезде. Через девятнадцать суток выяснились размеры внутренней планеты – она была больше Земли. Находясь на близком расстоянии от своего железного солнца, планета с бешеной скоростью неслась по своей орбите – её год был вряд ли больше двух-трёх земных месяцев. Невидимая звезда Т, вероятно, достаточно обогревала её своими чёрными лучами – при наличии атмосферы там могла быть жизнь».

Итак, в базе данных имеем: температура поверхности Т-звезды $T_{\text{зв}} = 2000\ \text{К}$; температура поверхности внутренней планеты $t_{\text{пл}} = 10^\circ C$. Предполагаем, что Т-звезда является «чёрным карликом» массой $M_{\text{зв}} = 0{,}01 M_\odot$ и радиусом $R_{\text{зв}} = 0{,}1 R_\odot$. Вычислить: 1) радиус орбиты внутренней планеты Т-звезды (в а.е); 2) период обращения планеты вокруг звезды (в земных сутках) и её орбитальную скорость (в км/с).

Решение. 1) Интенсивность излучения на расстоянии r от звезды

$$I(r) = \frac{W(r)}{S(r)\cdot t} = \frac{\Phi(r)}{4\pi r^2}.$$

По закону сохранения потока излучения имеем: $\Phi(r) = \Phi_0 = L$, где $L = 4\pi\sigma R_{\text{зв}}^2 T_{\text{зв}}^4$ – светимость звезды. Интенсивность излучения на расстоянии r от звезды

$$I(r) = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

Будем считать, что планета полностью поглощает падающее на неё излучение звезды (альбедо A=0). Энергия излучения, поглощаемая планетой, равна

$$W_{\text{погл}} = I(r) S_{\max} t = I(r)\pi R_{\text{пл}}^2 t.$$

Энергия, излучаемая планетой, равна $W_{\text{изл}} = \sigma T_{\text{пл}}^4 4\pi R_{\text{пл}}^2 t$. В состоянии равновесия $W_{\text{погл}} = W_{\text{изл}}$. Отсюда получаем: $L = 16\pi\sigma T_{\text{пл}}^4 r^2$ и

$$4\pi\sigma R_{\text{зв}}^2 T_{\text{зв}}^4 = 16\pi\sigma T_{\text{пл}}^4 r^2.$$

Отсюда находим расстояние от звезды до планеты:

$$r = \frac{R_{\text{зв}}}{2}\left(\frac{T_{\text{зв}}}{T_{\text{пл}}}\right)^2 = 1{,}7\cdot 10^9 \text{ м} = 0{,}01 \text{ а.е.}$$

2) Период T обращения планеты вокруг звезды и орбитальную скорость планеты найдём из уравнения движения для круговых орбит. Очевидно, что

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 28 \text{ км/с} \quad \text{и}$$

$$T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = 3{,}8\cdot 10^5 \text{ с} = 4{,}4 \text{ сут}.$$

Примечание. Для карликовых звёзд соотношение «светимость-масса» имеет вид $L \sim M^{5/2}$, или

$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/2}$. Тогда для массы звезды получаем:

$$\frac{M}{M_\odot} = \left[\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4\right]^{0,4}.$$

При $T_\odot = 6000$ К, $T = 2000$ К и $R = 0{,}1R_\odot$ получаем:

$$M = 0{,}027M_\odot \approx 0{,}03M_\odot.$$

В этом случае $v = 49$ км/с и $T = 2{,}5$ сут.

Задача 5. Слияние чёрных дыр Шварцшильда. Один из законов физики чёрных дыр гласит, что ни при каких взаимодействиях и процессах площадь поверхности чёрной дыры не может уменьшиться. Оцените энергию, которая может выделиться при слиянии двух одинаковых чёрных дыр Шварцшильда солнечной массы (рис. 3). Оцените мощность излучения в таком процессе.

Решение. 1) По закону сохранения энергии имеем: $W_0 = W + Q$ и,

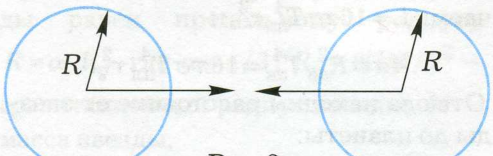

Рис. 3

следовательно, $Q = W_0 - W$. В начальном состоянии энергия чёрных дыр $W_0 = 2M_0c^2$. Энергия образовавшейся чёрной дыры $W = Mc^2$. Следовательно, $Q = (2M_0 - M)c^2$. Массу образовавшейся чёрной дыры найдём из условия $S \ge S_0$ (закон «площадей») или $4\pi R^2 \ge 2 \cdot 4\pi R_0^2$. Отсюда следует, что радиус образовавшейся чёрной дыры $R \ge \sqrt{2} \cdot R_0$, или

$$\frac{2GM}{c^2} \ge \sqrt{2} \cdot \frac{2GM_0}{c^2}.$$

Следовательно, $M \ge M_{\min} = \sqrt{2} \cdot M_0$.

При минимальном значении массы получаем:

$$Q_{\max} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2M_0c^2 = 0{,}586 \cdot M_0c^2$$ и

$$\frac{Q_{\max}}{2M_0c^2} = 0{,}29 \text{ или } 29\%.$$

При $M_0 \approx M_\odot$ получаем:

$$Q_{\max} = 1{,}1 \cdot 10^{47} \text{ Дж}.$$

(понятно, что массы звёздных чёрных дыр $M \ge 3M_\odot$).

2) Мощность излучения $N = \frac{Q_{\max}}{\tau}$, где τ – характерное время процесса. Полагая (из соображений размерностей), что $\tau \approx \frac{R_g}{c}$, получаем:

$$N \approx \frac{cQ_{\max}}{R_g} = 0{,}293\frac{c^5}{G} \approx 1{,}1 \cdot 10^{52} \text{ Вт}.$$

Выделяемая мощность не зависит от масс сливающихся чёрных дыр.

Материал к публикации подготовил С.П. Кожинин.